AZ R[u (x) v (x)] = R[u (x)] + R[v (x)] TÍPUSÚ LEKÉPZÉS NÉHÁNY MEGOLDÁSÁRÓL ÉS ALKALMAZÁSÁRÓL

DR. PERGE IMRE

(Közlésre érkezett: 1969. november 27.)*

1. §. Az R(u) és R^{-1}(u) típusú leképzések tulajdonságai

Tekintsük az (a, b) intervallumon értelmezett pozitív valós függvények halmazát $P(a, b)$—t, *vagyis* ha $u(x) \in P(a, b)$, akkor $u(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$-re. Legyen $P^* \subset P(a, b)$ olyan, hogy

a) ha u és $v \in P^*$, akkor $uv \in P^*$

b) *ha* $u \in P^*$ és λ tetszőleges valós szám, akkor $u^\lambda \in P^*$

DEFINÍCIÓ: Az $R: P^* \to F(a, b)$ (1)

leképzést (ahol $F(a, b)$ az (a, b)-ben értelmezett függvények halmaza), ha teljesülnek az alábbi feltételek

$$R(u\,v) = R(u) + R(v)\,,\ \text{ha } u,\ v \in P^*, \tag{2}$$

$$R(u^\lambda) = \lambda\, R(u)\,, \text{ha } u \in P^* \text{ és } \lambda \text{ tetszőleges valós} \tag{3}$$

szám R típusú leképzésnek nevezzük.

Mindazon $L(u)$ leképzéseket, amelyek kielégítik a *(2, 3)* feltételeket az R leképzés megvalósítható megoldásainak, röviden R megoldásoknak nevezzük.

A következőkben az R leképzés és inverze, az R^{-1} leképzés néhány tulajdonságát ismertetjük. Foglalkozunk e leképzések megoldásával is. Végül pedig egy speciális határértékkel definiált R megoldást, mint műveletet vizsgáljuk meg.

1. TÉTEL: *Ha $L_1(u)$ és $L_2(u)$ két különböző megoldása az R leképzésnek, akkor*

$$L(u) = \alpha\, L_1(u) + \beta\, L_2(u) \tag{4}$$

is megoldása R-nek, ahol α és β teszőleges valós szám.

---

*Közlésre javasolta: dr. Pelle Béla tanszékvezető
Lektorálta: dr. Daróczy Zoltán tanszékvezető egyetemi docens, Kossuth Lajos Tudományegyetem

BIZONYÍTÁS: Mivel L_1 és L_2 megoldásai R-nek, *ezért*

$$L(u\,v)=\alpha\,L_1(u\,v)+\beta\,L_2(u\,v)=L(u)+L(v) \text{ és}$$

$$L(u^\lambda)=\lambda\,[\alpha\,L_1(u)+\beta\,L_2(u)]=\lambda\,L(u),$$

vagyis $L(u)$-ra is teljesül a (2, 3) feltétel.

MEGJEGYZÉS. Nyilván igaz az alábbi általánosabb tétel is.
Ha $L_i\ (u),\, i=1, 2, \ldots, n$ különböző megoldásai R-nek, akkor ezen megoldások lineáris kombinációja is megoldása R-nek,
vagyis

$$L(u)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,L_i(u).$$

2. TÉTEL. *Az R leképzésre, illetve megoldására alkalmazva bármilyen A lineáris leképzést, újra R leképzést kapunk.*

BIZONYÍTÁS. Az A lineáris leképzés

$$\begin{aligned} A(u+v)&=A(u)+A(v)\\ A(\lambda\,u)&=\lambda\,A(u), \end{aligned} \tag{5}$$

ahol $u,\ v\in F(a, b)$ és λ tetszőleges valós szám, tulajdonsága miatt

$$A\,[R\,(u\,v)]=A\,[R\,(u)]+A\,[R\,(v)] \text{ és}$$

$$A\,[R\,(u^\lambda)]=\lambda\,A\,[R\,(u)\,],$$

vagyis röviden az

$$L(u)=AR(u) \tag{6}$$

szorzatleképzés ugyancsak megoldása az R leképzésnek. Ezáltal az R leképzés újabb megoldásait kaphatjuk.

Az R leképzésnek megfelelő Cauchy típusú függvényegyenletből például közvetlenül adódik R egy megoldása

$$L(u)=ln\,u \qquad u\in P^*. \tag{7}$$

Mivel $ln\ u(x)$ megoldása R-nek, így a

$$D(u)=\frac{du}{dx}$$

lineáris leképzés miatt $ln\,u(x)$ differenciálhányadosa is megoldása R-nek. ha létezik. Vagyis (6) miatt

$$L_1(u)=D\,(ln\,u)=\frac{D(u)}{u}, \tag{8}$$

ugyancsak megoldása R-nek, amit logaritmikus deriválás néven szoktunk emlegetni. Hasonlóan adódik, hogy pl.

$$L_2(u)=\int_1^x ln\ u(s)\,ds, \qquad (u(x)>o \text{ folytonos függvény}) \tag{9}$$

ugyancsak megoldása R-nek.

3. TÉTEL. *Az R leképzés még — az R definíciója alapján könnyen igazolható — alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

$\lambda = -1$ esetén nyerjük, hogy

$$R(u^{-1}) = -R(u)\ , \text{ ha } u \in P^*, \text{ és így} \tag{10}$$

$$R\left(\frac{u}{v}\right) = R(u) - R(v), \text{ ha } u,\ v \in P^*, \tag{11}$$

ahonnan $u = v$ esetén nyerjük, hogy

$$R(1) = 0 \tag{12}$$

és végül teljes indukcióval igazolható, hogy

$$R\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} R(u_i),\ u_i \in P^* \text{ és } i = 1, 2, \dots, n\,. \tag{13}$$

Könnyen belátható, hogy ha R-nek létezik az R^{-1} inverz leképzése, akkor az az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$R^{-1}(u+v) = R^{-1}(u) \cdot R^{-1}(v), \tag{14}$$

$$R^{-1}(\lambda u) = [R^{-1}(u)]^{\lambda}, \tag{15}$$

ahol $u, v \in F(a, b)$ és λ tetszőleges valós szám.

Nyilvánvaló, hogy $R^{-1}(u) = 0$ triviális megoldása az R^{-1} leképzésnek. A nem triviális megoldás azonban egyetlenegy $u(x)$ függvényhez sem rendeli a nulla függvényt, mert ha $R^{-1}(v) = 0$ lenne, akkor bármely $u \neq v$ függvényhez is az azonosan nulla függvényt rendelné, mivel akkor

$$R^{-1}(u) = R^{-1}[(u-v)+v] = R^{-1}(u-v) \cdot R^{-1}(v) = 0$$

lenne a feltevéssel ellentétben.

4. TÉTEL: *R^{-1} pozitív leképzés, vagyis minden $u \in F(a, b)$-re $R^{-1}(u) > 0$, ha létezik.*

BIZONYÍTÁS: $R^{-1}(u) = \left[R^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2 > 0$.

Az R^{-1} inverz leképzés még az alábbi könnyen igazolható tulajdonságokkal is rendelkezik.

Mivel $R^{-1}(u) = R^{-1}(u+0) = R^{-1}(u) \cdot R^{-1}(0)$ és $R^{-1}(u) \neq 0$,

$$\text{ezért } R^{-1}(0) = 1\,, \tag{16}$$

vagyis a leképzés az azonosan nulla függvényhez az azonosan 1 függvényt rendeli. Továbbá $\lambda = -1$-re (15)-ből nyerjük, hogy

$$R^{-1}(-u) = \frac{1}{R^{-1}(u)}, \tag{17}$$

és mivel $R^{-1}(u) \neq 0$, ezért (14) és (17) egybevetéséből kapjuk, hogy

$$R^{-1}(u-v) = \frac{R^{-1}(u)}{R^{-1}(v)}. \tag{18}$$

Végül könnyen igazolható teljes indukcióval, hogy (14) tetszőleges n természetes számra is igaz.

$$R^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) = \pi_{i=1}^{n} R^{-1}(u_i). \tag{19}$$

5. TÉTEL: *Az R^{-1} inverz leképzés létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az $R(u)=0$ egyenletnek, csak az $u(x)=1$ megoldása legyen.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy R^{-1} létezik és $R[u_0(x)]=0$. Bebizonyítjuk, hogy $u_0(x)=1$. Nyilván

$$u_0 = R^{-1} R(u_0) = R^{-1}(0)$$

és így (18) és (16) miatt

$$u_0(x) = R^{-1}(u-u) = 1.$$

A bizonyítás másik részében tegyük fel, hogy az $R(u)=0$ egyenletnek csak az $u(x)=1$ megoldása van. Az R^{-1} inverz leképzés létezéséhez elegendő bizonyitani, hogy $R(u)$ a P^* különböző elemeihez, különböző elemeket rendel $F(a,b)$-ben. Legyen $u_1 \neq u_2$, ahol $u_1, u_2 \in P^*$. Tegyük fel, hogy R nem rendel különböző elemeket u_1 és u_2-höz, tehát

$$R(u_1) = R(u_2),$$

vagyis

$$R\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy az $u = \dfrac{u_1}{u_2} \neq 1$ is megoldása az $R(u)=0$ egyenletnek, ami ellentmondásban van az elfogadott feltételünkkel. Tehát az R^{-1} leképzés létezik.

MEGJEGYZÉS: Az $L(u) = \ln u(x)$, $u \in P^*$ leképzésnek létezik az inverze, mivel az $\ln u(x) = 0$ egyenletnek, csak az $u(x) = 1$ megoldása van. Az L leképzés inverze.

$$L^{-1}(v) = e^v, \; v \in F(a,b), \text{ ahol} \tag{20}$$

$L(u) = v = \ln u$. De pl. az $L_2(u) = \dfrac{D(u)}{u}$ (ahol $u \neq 0$ és differenciálható függvény) leképzésnek nem létezik az inverze, mivel az $L_2(u)=0$ egyenletnek valamennyi $u(x) =$ constans megoldása lesz.

6. TÉTEL: *Ha $E_1(u)$ és $E_2(u)$ két különböző megoldása az R^{-1} leképzésnek, akkor*

$$E(u) = E_1^{\alpha}(u) \cdot E_2^{\beta}(u) \qquad (21)$$

is megoldása R^{-1}-nek, ahol α és β tetszőleges valós szám.

BIZONYÍTÁS: Mivel E_1 és E_2 megoldása R^{-1}-nek, ezért $E(u+v) = E_1^{\alpha}(u) \cdot E_2^{\beta}(u) \cdot E_1^{\alpha}(v) \cdot E_2^{\beta}(v) = E(u) \cdot E(v)$, továbbá $E(\lambda u) =]E_1^{\alpha}(u) \cdot E_2^{\beta}(u)]^{\lambda} = E^{\lambda}(u)$, vagyis $E(u)$ is megoldása R^{-1}-nek.

MEGJEGYZÉS. Teljes indukcióval hasonlóan könnyen bizonyítható az alábbi általánosabb tétel is. Ha $E_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ különböző megoldásai R^{-1}-nek, akkor

$$E(u) = \mathop{\pi}_{i=1}^{n} E_i^{\alpha_i} u \qquad (22)$$

is megoldása az $R^{-1}(u)$ leképzésnek.

7. TÉTEL. *Bármely $A(u)$ lineáris leképzésre, amely az (5) tulajdonságokkal rendelkezik, alkalmazva az R^{-1} leképzést, újra R^{-1} leképzést kapunk.*

BIZONYÍTÁS. Tekintettel az $A(u)$ lineáris leképzés (5) tulajdonságaira

$$R^{-1}[A(u+v)] = R^{-1}[A(u)] \cdot R^{-1}[A(v)],$$

és

$$R^{-1}[A(\lambda u)] = \{R^{-1}[A(u)]\}^{\lambda},$$

vagyis röviden az

$$E(u) = R^{-1} A(u) \qquad (23)$$

szorzatleképzés ugyancsak megoldása az R^{-1} leképzésnek. Ezáltal tehát újabb R^{-1} típusú leképzéseket nyerünk. Pl. az $R^{-1}(u)$ egy megvalósítható megoldása $E(u) = e^{u(x)}$, $u(x) \in F(a,b)$, és mivel $D(u) = \frac{du}{dx}$ egy lineáris leképzés, ezért

$$ED(u) = e^{u'(x)} \qquad \text{(u (x) differenciálható)} \qquad (24)$$

ugyancsak megoldása R^{-1}-nek.

2. §. A relativált fogalma és tulajdonságai

A következőkben egy speciális

$$R(u): \quad P^* \rightarrow F(a,b)$$

leképzéssel foglalkozunk. A függvények vizsgálata szempontjából fontos lehet a függvény relatív változása is. Alkalmazást nyer a relatív hibakorlát meghatározásánál, továbbá a gyakorlati életben is, pl. a kereskedelemben. Előnyös azért is, mert független az egyes mennyiségekre önkényesen bevezetett egységektől is.

DEFINÍCIÓ: A

$$\lim_{h\to 1} \underset{\log}{\overset{h}{\smile}} \frac{u(hx)}{u(x)}\,; \quad u(u) \in P^* \tag{25}$$

határértéket, ha létezik az $y=u(x)$ függvény x pontjában vett „relativált"-jának nevezzük és az alábbi formulával jelöljük,

$$\tilde{u}(x) = \underset{\log}{\overset{rx}{\smile}} ru(x)\,. \tag{26}$$

8. TÉTEL: *Ha létezik az u és v függvények relativáltja, akkor az $R(u) = \tilde{u}(x)$ megoldása az $R(u)$ leképzésnek.*

BIZONYÍTÁS. A határérték, valamint a logaritmus tulajdonságai alapján a definícióból könnyen belátható, hogy

$$[u(x)\cdot v(x)]^{\sim} = \tilde{u}(x) + \tilde{v}(x)\,,$$

és

$$[u^{\lambda}(x)]^{\sim} = \lambda\,\tilde{u}(x)\,,$$

vagy más alakban

$$\underset{\log}{\overset{rx}{\smile}} r(uv) = \underset{\log}{\overset{rx}{\smile}} ru + \underset{\log}{\overset{rx}{\smile}} rv\,,$$

és

$$\underset{\log}{\overset{rx}{\smile}} ru^{\lambda} = \lambda \underset{\log}{\overset{rx}{\smile}} ru\,.$$

DEFINÍCIÓ. *Az $u(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy relativálható az x pontban, ha*

$$\frac{u(hx)}{u(x)} = h^{A\cdot\varepsilon(h)} \tag{27}$$

alakba előállítható, ahol A konstans és $\lim_{h\to 1} \varepsilon(h) = 1\,.$

Például az $u(x) = e^x$ függvény minden x rögzített pontban relativálható, mert

$$\frac{e^{xh}}{e^x} = h^{x\cdot\left(\frac{h-1}{\ln h}\right)}$$

ahol $A = x$ és $\varepsilon(h) = \dfrac{h-1}{\ln h}$, továbbá $\lim_{h\to 1} \dfrac{h-1}{\ln h} = 1\,.$

9. TÉTEL. *Ha az $u(x)$ függvény relativálható az x pontban, akkor ebben a pontban létezik a relativáltja.*

BIZONYÍTÁS. Az x pontbeli relativálhatóság miatt

$$\overset{h}{\smile}\!\log \frac{u(hx)}{u(x)} = A \cdot \varepsilon(h)$$

és így

$$\tilde{u}(x) = A \lim_{h \to 1} \varepsilon(h) = A$$

10. TÉTEL. *Ha az $u(x)$ függvénynek létezik az x helyen nullától különböző relativáltja, akkor*

$$\frac{u(hx)}{u(x)} = h^{\tilde{u}(x) \cdot \omega(h)},$$

ahol $\omega(h)$ a $h=1$ helyen folytonos.

BIZONYÍTÁS. Legyen ugyanis

$$\omega(h) = \frac{1}{\tilde{u}(x)} \overset{h}{\smile}\!\log \frac{u(hx)}{u(x)}, \text{ ha } h \neq 1$$

és $\omega(1)=1$, *akkor*

$$\lim_{h \to 1} \omega(h) = \frac{\tilde{u}(x)}{\tilde{u}(x)} = 1 \text{ és így } \lim_{h \to 1} \omega(h) = 1 = \omega(1).$$

A két tétel alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

11. TÉTEL. *Az $u(x)$ függvény az x helyen akkor és csak akkor relativálható, ha létezik az x helyen $\tilde{u}(x) \neq 0$ relativáltja.* Tehát az x helyen relativálható függvény, valamint az olyan függvény, amelynek van relativáltja az x helyen, ugyanazt jelenti.

12. TÉTEL. *Az $u(x)$ függvény relatív változásának*

$$\frac{u(hx)}{u(x)} = h^{A \cdot \varepsilon(h)},$$

ahol $\varepsilon(h) \to 1$-hez, ha $h \to 1$-hez, alakba való előállítása csak egyetlen módon lehetséges.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás indirekt úton könnyen elvégezhető.

13. TÉTEL. *Ha az $u(x)$ függvény elsőrendben folytonosan differenciálható, akkor létezik a relativáltja és*

$$\tilde{u}(x) = \frac{xu'(x)}{u(x)}. \tag{28}$$

BIZONYÍTÁS. Mivel (25)-re teljesülnek a L. Hospital szabály feltételei, ezért

$$\tilde{u}(x)=\lim_{h\to 1}\frac{\ln u(hx)-\ln u(x)}{\ln h},$$

vagyis

$$\tilde{u}(x)=\lim_{h\to 1} hx\frac{u'(hx)}{u(xh)}=x\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

14. TÉTEL. *Ha az $u(x)$ függvény az x pontban relativálható, akkor ott folytonos is.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $x_n=hx$. Ha $h\to 1$, akkor $x_n\to x$ és mivel $h\to 1$ esetén $\varepsilon(h)\to 1$, ezért

$$\frac{u(x_n)}{u(x)}\to 1\text{, ahonnan } u(x_n)\to u(x) \text{ adódik.}$$

3. §. A relativálás és az exponenciális integrálás

Mivel a leképzés függvény, a műveletet pedig mint függvényt vizsgálhatjuk, ezért az ismertetett $R(u)$ és $R^{-1}(u)$ leképzések a $P^*(a, b)$, illetve az $F(a, b)$ függvényhalmazon értelmezett műveleteknek tekinthetők, hasonlóan, mint az $A(u)$ lineáris leképzés esetében a függvények deriválása és integrálása. Természetesen a leképzés tulajdonságai mint műveleti tulajdonságok ugyancsak érvényben maradnak, és egy-egy konkrét megvalósítható megoldás esetén, még további új műveleti tulajdonságokkal bővülhetnek.

DEFINÍCIÓ. *Az $u(x)$ függvény relativáltjának meghatározását relativálásnak nevezzük.*

Mivel az $\tilde{u}(x)$ az $R(u)$ leképzés egy megvalósítható megoldása, ezért érvényesek az alábbi relativálási szabályok:

1. Szorzat függvény relativáltja megegyezik a tényezők relativáltjainak összegével, feltéve, hogy a szóban forgó relativáltak léteznek, vagyis

$$[u(x)\cdot v(x)]^{\sim}=\tilde{u}(x)+\tilde{v}(x).\tag{29}$$

2. Az $u(x)/v(x)$ tört függvény relativáltja

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]^{\sim}=\tilde{u}(x)-\tilde{v}(x),\tag{30}$$

feltéve, hogy a szóban forgó relativáltak léteznek.

3. Tetszőleges konstans kitevőjű függvény relativáltja megegyezik az illető függvény relativáltjának és a kitevőjének a szorzatával, vagyis

$$[u^{\lambda}(x)]^{\sim}=\lambda\tilde{u}(x).\tag{31}$$

A fenti tulajdonságokon kívül a relativálás mint speciális $R(u)$ leképzés még az alábbi könnyen igazolható tulajdonságokkal is rendelkezik:

4. Az $u(x) =$ constans függvény relativáltja nulla, vagyis

$$\tilde{c} = 0. \tag{32}$$

5. Összeg relativáltja megegyezik a tagok relativáltjainak az adott függvényekkel súlyozott számtani közepével, feltéve, hogy a szóban forgó relativáltak léteznek, vagyis

$$[u+v]^{\sim} = \frac{u\tilde{u}+v\tilde{v}}{u+v}, \tag{33}$$

ahol $u=u(x)$ és $v=v(x)$.

Az $R(u)=\tilde{u}(x)$ jelölés mellett más alakba írva nyerjük, hogy

$$(u+v)\,R(u+v)=u\,R(u)+v\,R(v), \tag{34}$$

ahonnan $v=\lambda > 0$ (valós szám) helyettesítéssel az

$$\frac{u+\lambda}{u} = \frac{R(u)}{R(u+\lambda)} \tag{35}$$

összefüggést kapjuk. Így tehát bármely $u > 0$ relativálható függvényt előállíthatjuk az

$$u=\frac{\lambda}{\dfrac{R(u)}{R(u+\lambda)}-1} \tag{36}$$

alakban, illetve a (31) miatt

$$u=\frac{\lambda}{\dfrac{R(u^{\alpha})}{R[(u+\lambda)^{\alpha}]}-1} \tag{37}$$

alakban, ahol α tetszőleges valós szám.

Végül megemlítjük még a deriválásra és a relativálásra egyaránt vonatkozó általános tulajdonságokat.

6. Az összetett függvény relativáltja, illetve differenciálhányadosa

$$R[u(v(x))] = R[u(v)] \cdot R[v(x)]. \tag{38}$$

Ha $v(x)=x$, akkor $R[u(x)] = R[u(x)] \cdot R(x)$, ahonnan adódik, hogy $R(x)=1$.

7. Ha $u=u(x)$ és ebből $x=x(u)$, akkor

$$R[u(x)] \cdot R[x(u)]=1,$$

vagy más alakban

$$R[u(x)]=\frac{1}{R[x(u)]}, \tag{39}$$

amely az inverz függvény relativáltjának, illetve deriváltjának meghatározására szolgál.

MEGJEGYZÉS. A *(32), (38)* és *(39)*-es tulajdonságok egyaránt érvényes sajátosságai a deriválásnak és a relativálásnak is. Érdemes lenne megvizsálni, hogy van-e még más — nem a lineáris, illetve az $R(u)$ leképzés által generált — művelet is, amely rendelkezik az említett tulajdonságokkal.

DEFINÍCIÓ. *Akkor mondjuk, hogy az $F(x)$ függvény az $u(x)$ függvény határozatlan exponenciális integrálja valamely intervallumban, ha ennek minden pontjában*

$$\tilde{F}(x) = u(x), \tag{40}$$

$F(x)$-et a következőképpen jelöljük:

$$F(x) = \int rx^{u(x)}. \tag{41}$$

A relativálás ezen inverz művelete nyilván rendelkezik az R^{-1} leképzés valamennyi tulajdonságával.

1. Könnyen bizonyítható, hogy $u(x)$ exponenciális integráljai csak konstans szorzóban különbözhetnek egymástól, vagyis

$$\int rx^{u(x)} = c\, F(x). \tag{42}$$

2. Összeg függvény exponenciális integrálja egyenlő a tagok exponenciális integráljainak a szorzatával; különbség exponenciális integrálja egyenlő a szereplő tagok exponenciális integráljának a hányadosával, feltéve, hogy a tagok exponenciális integráljai léteznek, vagyis

$$\int rx^{u(x)+v(x)} = \int rx^{u(x)} \cdot \int rx^{v(x)} \quad \text{és} \tag{43}$$

$$\int rx^{u(x)-v(x)} = \frac{\int rx^{u(x)}}{\int rx^{v(x)}}. \tag{44}$$

3. A konstans szorzó kivihető hatványkitevőnek az exponenciális integrál jele alól, vagyis

$$\int rx^{cu(x)} = \left[\int rx^{u(x)}\right]^c. \tag{45}$$

Megemlítjük még az exponenciális és közönséges integrál kapcsolatát is.

15. TÉTEL. Ha $\int rx^{u(x)}$ relativálható, akkor előállítható

$$\int rx^{u(x)} = \exp\left\{\int \frac{u(x)}{x}\, dx\right\} \tag{46}$$

alakban.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\int rx^{u(x)} = F(x)$. Mivel

$$\tilde{F}(x) = \frac{x\,F'(x)}{F(x)} = u(x)\,,$$

ezért

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{u(x)}{x}\,, \quad \text{illetve } [\ln F(x)]' = \frac{u(x)}{x}\,,$$

és így

$$\int rx^{u(x)} = \exp\left\{\int \frac{u(x)}{x}\,dx\right\}.$$

MEGJEGYZÉS. A fenti fogalmak segítségével értelmezhető a határozott exponenciális integrál is, amely az alábbi könnyen bizonyítható formulával számolható

$$\int_a^b rx^{u(x)} = [F(x)]_a^b = \frac{F(b)}{F(a)}\,, \tag{47}$$

ahol $F(x)$ az $u(x)$ függvény határozatlan exponenciális integrálja.

Nyilván érvényes, az alábbi két tulajdonság jogos feltételezése mellett

$$\int_a^a rx^{u(x)} = 1 \quad \text{és} \tag{48}$$

$$\int_a^b rx^{u(x)} = \frac{1}{\int_b^a rx^{u(x)}}\,, \tag{49}$$

az alábbi tulajdonság is. Ha *a, b és c* tetszőleges számok, akkor

$$\int_a^b rx^{u(x)} = \int_a^c rx^{u(x)} \cdot \int_c^b rx^{u(x)}\,. \tag{50}$$

A parciális deriváltakhoz hasonlóan természetesen a relativált is értelmezhető többváltozós függvényekre. Ezek vizsgálatára itt nem térünk ki.

Végül megemlítjük még a relativált két egyszerű gyakorlati alkalmazását is.

a) A függvény relatív hibakorlátja. Ismeretes, hogy a függvény hibakorlátját megkaphatjuk, ha a differenciálhányadosa abszolút értékét megszorozzuk a független változó hibájával, vagyis

$$\triangle u(x) = |u'(x)|\,\triangle x\,.$$

Ehhez hasonló formulát kaphatunk a függvény relatív hibakorlátjára a relativált segítségével. A függvény relatív hibakorlátja egyenlő a függvény relativáltja abszolút értékének és a független változó relatív hibakorlátjának a szorzatával, vagyis

$$ru(x) = |\tilde{u}(x)|\, rx\,,$$

ahol $r\,u\,(x)$ a függvény és rx a független változó relatív hibakorlátját jelöli.

Az elemi alapfüggvények relativáltjainak ismeretében, természetesen akármilyen elemi függvény relativáltja meghatározható, és így azok ismeretében a relatív hibakorlátjuk is.

b) Az elaszticitás. Mivel az

$$\tilde{u}(x) = \frac{x}{u(x)} \lim_{h \to o} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{u(x)}}{\dfrac{h}{x}}$$

alakba is írható, ezért az $u\,(x)$ függvény valamely x pontjában vett relativáltja, az azon helyhez tartozó relatív változások hányadosának határértékeként is tekinthető.

A közgazdasági számításoknál pl. a keresletkutatásnál éppen az említett relatív változások kapnak fontos szerepet, ahol az

$$\frac{x\,u'(x)}{u(x)} \tag{51}$$

előbb említett határértékét elaszticitásnak nevezik.

Ha pl. x az egy főre jutó jövedelmet és u valamely cikkcsoport egy főre jutó volumenét jelenti, akkor a volumenelaszticitás az (51) segítségével számítható.

Vagy pl. ha p a kérdéses árucikk ára és m a jövedelem, akkor az $u = u\,(m, p)$ kereslet az ár és jövedelem függvénye. Az u-nak az m szerinti elaszticitását jövedelem-, p szerinti elaszticitását ár-elaszticitásnak nevezzük.

IRODALOM

1. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei. Budapest, 1951.
2. Dr. Szép Jenő: Analízis. Budapest, 1965.
3. R. Courant: Vorlesungen über Differential — und Integralrechnung. Berlin, 1955.
4. Ja. Sz. Bjezikovics: Közelítő számítások. Budapest, 1952.

ÜBER EINIGE LÖSUNGEN UND ANWENDUNGEN DER ABBILDUNG VON DEM TYPUS $R(u\,v) = R(u) + R(v)$

E. PERGE

Es sei $P(a, b)$ eine Menge der im Intervall (a, b) erklärten positiven reellen Funktionen und $P^* \subset P(a, b)$ eine Teilmenge, in dieser Hinsicht wenn

a) ist $u, v \in P^*$, dann $uv \in P^*$ und wenn

b) *ist* $u \in P^*$ und λ ein beliebiger reller Zahl, dann $u^\lambda \in P^*$. Die Abbildung mit der Eigenschaft

$$R(u\,v) = R(u) + R(v),$$

und

$$R(u^\lambda) = \lambda R(u)$$

($u, v \in P^*$ und λ ein beliebiger reeller Zahl) ist eine so genannte „R" Abbildung. Die inverse Abbildung wird durch $R^{-1}(u)$ gezeichnet. Es handelt sich um die Eigen schaften und die Lösungen dieser Abbildung. Wir geben hier eine spezielle Lösungen von $R(u)$

$$\tilde{u}(x) = \lim_{h \to 1} \underset{\smile}{h} \frac{u(hx)}{\log u(x)}; \quad u(x) \in P^*,$$

die „das Relativierte" der Funktion $u(x)$ an der Stelle x genannt wird.

Die Operation $\tilde{u}(x)$ besitzt hat die folgenden Grundeigenschaften

$$1. \quad [u+v]^{\sim} = \frac{u\,\tilde{u} + v\,\tilde{v}}{u + v},$$

$$2. \quad [u\,v]^{\sim} = \tilde{u} + \tilde{v},$$

$$3. \quad \left[\frac{u}{v}\right]^{\sim} = \tilde{u} - \tilde{v},$$

$$4. \quad [u^\lambda]^{\sim} = \lambda\,\tilde{u}$$

und die inverse $\tilde{u}(x)$ Operation hat die nächsten Grundeigenschaften

$$1. \quad \int r x^{u(x)+v(x)} = \int r x^{u(x)} \int r x^{v(x)},$$

$$2. \quad \int r x^{u(x)-v(x)} = \frac{\int r x^{u(x)}}{\int r x^{v(x)}},$$

$$3. \quad \int r x^{c\,u(x)} = \left[\int r x^{u(x)}\right]^c$$

Zuletzt weisen wir an einige praktischen Anwendungen hin.